Das Dreikörperproblem und die kosmischen Trojaner

Anfang des 17. Jahrhunderts stellte Johannes Kepler erste mathematische Regeln zur Bewegung der Planeten um die Sonne in Form der drei nach ihm benannten Gesetze auf, die man vereinfacht wie folgt formulieren kann:

1. Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Die Sonne steht dabei in einem der Brennpunkte der Ellipse der Umlaufbahn
2. Sie bewegen sich umso schneller, je näher sie auf ihrer Bahn der Sonne kommen 3. Eine Umrundung der Sonne dauert umso länger, je größer die Bahn ist.

Im **Bild 1** sind die drei Gesetze grafisch dargestellt und erläutert.

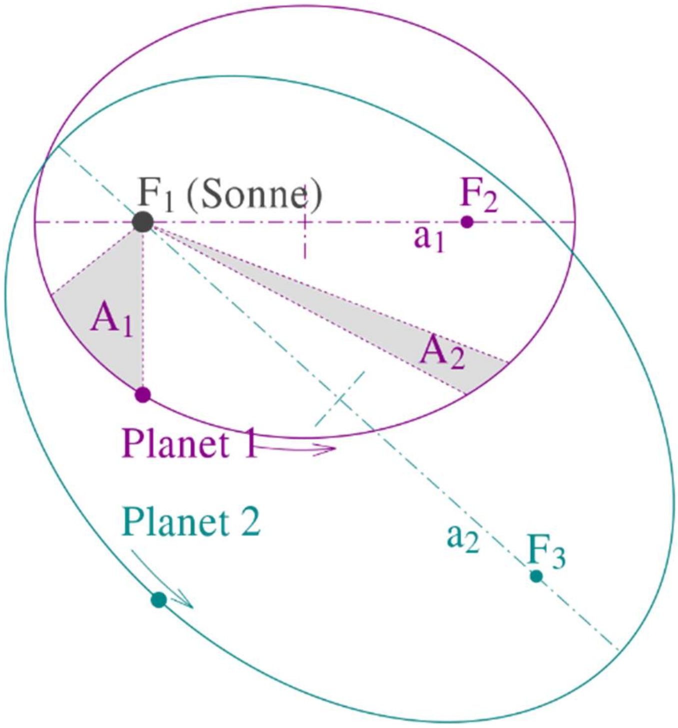
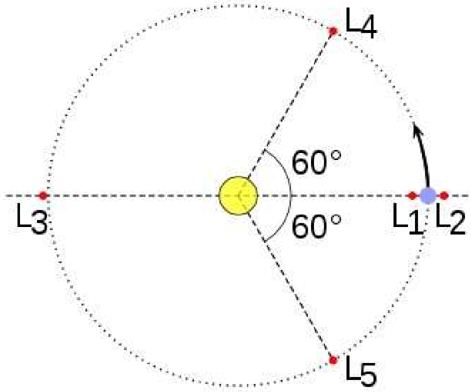


Bild 1 *Grafische Zusammenfassung der drei Keplerschen Gesetze: 1. Zwei ellipsenförmige Umlaufbahnen mit der Sonne im Brennpunkt F_1. F_2 und a_1 sind der andere Brennpunkt bzw. die große Halbachse für Planet 1, F_3 und a_2 für Planet 2. 2. Die beiden grauen Sektoren A_1 und A_2, die dieselbe Fläche haben, werden in derselben Zeit überstrichen. 3. Die Quadrate der Umlaufzeiten von Planet 1 und Planet 2 verhalten sich wie $a_1^3 : a_2^3$. Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Gesetze*

Während die Keplerschen Gesetze nur die Ermittlung von Verhältniszahlen erlauben, wurde durch Isaac Newton später die detaillierte mathematisch-physikalische Basis zur Berechnung der zwischen den Himmelskörpern wirkenden Gravitationkräfte in Form von Absolutwerten entwickelt.

Der vorgenannte Untersuchungsgegenstand entspricht einem Zweikörperproblem. Dafür existieren exakte Lösungen. Schon den Pionieren auf dem Gebiet der Himmelsmechanik war aber klar, dass diese Lösungen nicht zur Beschreibung der Bewegungen im Sonnensystem ausreichen. Keplers Gesetze beschreiben den Umlauf einzelner Planeten um die Sonne ohne Berücksichtigung aller anderen Planeten. Diese komplexen Wechselwirkungen sind zwar theoretisch mit Newtons Gleichungen berechenbar, aber praktisch sind die Gleichungen nur in wenigen Sonderfällen allgemein lösbar. Das gilt sogar für den anscheinend sehr einfachen Fall des sogenannten Dreikörperproblems (z.B. Sonne, Erde, Mond). Ende des 19. Jahrhunderts konnte nachgewiesen werde, dass es hierfür keine analytische, explizite Lösung geben kann. Für das Problem können nur auf numerischem Wege Lösungen für den jeweiligen speziellen Fall gefunden werden. Solche Lösungen existieren z. B. für das eingeschränkte Dreikörperproblem. Dabei werden drei Objekte betrachtet, von denen eines erheblich weniger Masse als die beiden anderen hat, so dass es zwar der gravitativen Wirkung der beiden anderen unterworfen ist, sein eigener Einfluss aber vernachlässigbar ist.

Ein Spezialfall des eingeschränkten Dreikörperproblems ist die Berechnung der fünf Lagrange-Punkte, die 1772 dem Namensgeber und berühmten französischen Mathematiker gelang. An diesen auch als Librationspunkte bezeich- neten Orten heben sich alle *Bild 2 Lagrange*in dem System wirkenden *Punkte L_1 bis L_5 in* Gravitationskräfte gegensei- *einem System aus* tig auf (**Bild 2**). *Zentralgestirn (gelb)*



Die Punkte L_1 und L_2 bilden *und Planet (blau):* mit den *...iden L_4 läuft dem Planeten* massereichen Körpern eine *voraus, L_5 hinterher* Linie und befinden sich z.B. *Quelle:* im System Sonne-Erde [https://de.wikipedia.](https://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte) jeweils ca. 1,5 Millionen km [org/wiki/Lagrange-](https://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte) von der Erde entfernt. *Punkte*

Normalerweise hätten die beiden Punkte auf Grund ihres Abstandes von der Sonne eine höhere (L_1) bzw. niedrigere (L_2) Umlaufgeschwindigkeit als die Erde. Durch die Anziehungskraft der Erde wird jedoch die Anziehungskraft der Sonne geschwächt (L_1) bzw. verstärkt (L_2), so dass alle Umlaufgeschwindigkeiten synchron sind.

L_3 befindet sich auf einer Umlaufbahn ca. 190 km außerhalb des Erdorbits auf der gegenüberliegenden Seite der Sonne. An diesem Punkt bewirken die gleichgerichteten (addierten) Anziehungskräfte der Sonne und der Erde die gleiche Umlaufdauer wie die der Erde.

L_4 und L_5 befinden sich nahezu im Erdorbit jeweils im dritten Punkt gleichschenkliger Dreiecke mit der Verbindungslinie Sonne-Erde als Basis und zwar 60 Grad vor (L_4) bzw. hinter (L_5) der Erde. Die etwas komplizierte Begründung hängt mit der an den Lagrange-Punkten wirkenden Corioliskraft zusammen, die kleine Objekte an diesen Punkten festhält bzw. sie bei Störeinflüssen in Umlaufbahnen um diese Punkte zwingt (https://de.wikipedia.org/wiki/Corioliskraft).

Ein kleiner Körper, der sich an einem Lagrange-Punkt befindet, kann prinzipiell unter Beibehaltung seiner Position zur Erde mit dieser um die Sonne mitrotieren, ohne dass dafür zusätzliche Kräfte aufgebracht werden müssten. Allerdings gibt es zwischen den LagrangePunkten wesentliche Unterschiede. Zur Veranschaulichung wird oft ein sogenanntes Gummimattenmodell verwendet (**Bild 3**). Darin werden durch Massen verursachte Gravitationskräfte durch Potentialsenken dargestellt, d.h. je größer die Gravitation ist, umso tiefer

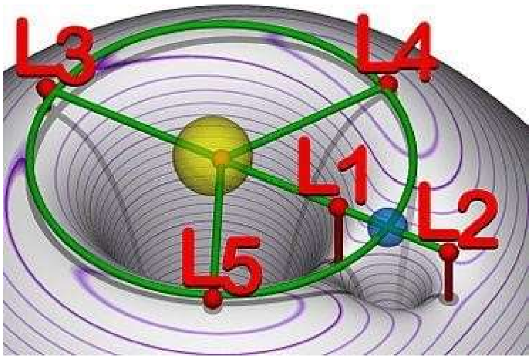


Bild 3 *Äquipotentiallinien des Schwerefeldes im mitrotierenden Bezugssystem als Gummimatten-Modell in violett eingezeichnet. Schnitt in der Umlaufebene, Massenverhältnis 1:10, damit sich L_1 und L_2 deutlich absetzen.*
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte

ist die Senke. L_1, L_2 und L_3 sind sogenannte Sattelpunkte. Ausgehend von diesen Punkten gibt es auf der Linie Sonne-Erde jeweils in beide Richtungen Potentialsenken, während es senkrecht dazu in beide Richtungen Potentialerhöhungen gibt. Demgegenüber befinden sich L_4 und L_5 in kleinen Potentialsenken, von denen aus es in jede Richtung einen Anstieg gibt.

Daraus folgt, dass Körper an den Punkten L_1 bis L_3

senkrecht zur Linie Sonne-Erde stabile Positionen haben, während sie sich längs dieser Linie in einem labilen Gleichgewicht befinden. Die Beibehaltung dieser Positionen erfordert in der Praxis stabilisierende Krafteinwirkungen. Im Gegensatz dazu haben L_4- und L_5 -Objekte in Bezug auf alle Richtungen eine stabile Lage bzw. bewegen sich auf nierenförmigen Bahnen um den jeweiligen Lagrange-Punkt.

Und damit kommen wir zu den Trojanern. Im Gegensatz zu Schadsoftware handelt es sich hierbei in der Astronomie um Ansammlungen von Asteroiden und anderen Objekten geringerer Größe, die im Bereich des L_4- bzw. L_5 -Punktes eingefangen wurden und diese Umgebung ohne Kraftaufwand nicht mehr verlassen können. Solche Trojaner wurden zuerst am Jupiter, später auch an der Erde und weiteren Planeten beobachtet. Inzwischen wurden sogar extrasolare Trojaner nachgewiesen (file:///C:/Users/User/AppData/Local/Temp/suw_2017_1_S16.pdf). Im Oktober 2021 soll die amerikanische Raumsonde Lucy starten und erstmalig Trojanern einen Besuch abstatten. Zwischen 2027 und 2033 soll sie nacheinander an sechs Jupitertrojanern vorbeifliegen und wissenschaftliche Daten sammeln (https://de.wikipedia.org/wiki/Lucy_(Raumsonde)).

Der innere Lagrangepunkt L_1 wird seit 1978 für die Treibstoff sparende Positionierung von Mess- und Beobachtungssystemen genutzt (u.a. ISEE-3 zur Kometenbeobachtung, SOHO zur Sonnenbeobachtung, ACE zur Partikelerforschung, Genesis zur Sonnenwinderforschung, Weltraumobservatorium Spektr-RG und seit dem letzten März der chinesische Orbiters Chang'e 5).

Durch die effektive Möglichkeit der Abschirmung vor Sonneneinstrahlung bietet der L_2-Punkt Vorteile für die Stationierung von Weltraumteleskopen (WMAP-Raumsonde und Teleskop Planck zur Untersuchung der kosmischen Hintergrundstrahlung, Infrarot-Teleskop Herschel, AstrometrieRaumsonde Gaia, künftig auch James-Webb-Weltraumteleskop).

Der Punkt L_3 im Sonne-Erde-System spielt bisher nur in Science-Fiction-Darstellungen eine Rolle. Dort ist von einer unentdeckten „Gegenerde" die Rede. Rein theoretisch könnte dort ein für uns unsichtbarer Planet existieren. Praktisch ist das allerdings nicht möglich, da der L_3-Punkt ja zu den instabilen Lagrange-Punkten gehört und schon geringste Störungen, wie sie z.B. durch den Jupiter verursacht werden, dazu führen würden, dass ein L_3-Objekt nach und nach seine Position verlassen und für uns sichtbar würde (https://de.wikipedia.org/wiki/Gegenerde).

Außer in Systemen Sonne-Planet existieren Lagrange-Punkte auch in Systemen Planet-Mond, z.B. ErdeErdmond. L_4 bzw. L_5 im letztgenannten System werden als Kandidaten für eine stationäre Raumstation bzw. Raumkolonie im Zusammenhang mit einer künftigen Rohstoffgewinnung auf dem Mond diskutiert. Entsprechende Orbits wären wesentlich stabilerer als die ISS-Umlaufbahn, allerdings müsste ein erhöhter Aufwand für den Strahlenschutz betrieben werden https://www.scinexx.de/dossierartikel/lagrange-punkte-und-rohstoffe-vom-mond/.